Lycée Fénelon	Mathématiques
Année 2021/22	BCPST1

Feuille d'Exercices 14

Suites réelles

Calcul de limite.

Exercice 1 :

Etudier le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a. $\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ b. $\sin\dfrac{(-1)^n}{n}$ c. $\dfrac{\cos(n+n^2)}{n+1}$

d. $\dfrac{\sin(e^n)}{\sqrt{n}}$ e. $\dfrac{5n-6}{n^2+2n+4}$ f. $\dfrac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^n}$

g. $\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{5n-6}$ h. $\dfrac{2^n-5^n}{2^n+5^n}$ i. $n^{\frac{1}{n^2}}-1$

j. $\dfrac{2^n+n^3+\ln n}{2^n+n!}$ k. $n\ln(\dfrac{n}{n+1})$ l. $\sin\dfrac{n\pi}{2}$

m. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+1}$ n. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

o. $\sqrt{4n^2+3n+1}-an+b$ où a et b sont des paramètres réels.

p. $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ où a et b sont des paramètres réels strictement positifs

Suites extraites

Exercice 2. Étudier la convergence des suites proposées en considérant, pour les deux premières, la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs.

$$u_n = \frac{4(n+1)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 2n^2+3}{n((-1)^n+e^{\frac{1}{n}})} \qquad v_n = \frac{2^{n+1}-(-2)^n}{2^{n+1}+(-2)^n} \qquad w_n = \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)$$

Encadrement

Exercice 3

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k}$.

1. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (2n+2)\times\dfrac{n}{n^2+(2n+1)} \leqslant u_n \leqslant (2n+2)\dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Encadrer $\lfloor nx \rfloor$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
2. Déterminer a_k de sorte que $\displaystyle\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Encadrer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} a_k$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$.
3. Encadrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} k!$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 5 :

1. Etablir : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

Équivalents

Exercice 6 :

Donner un équivalent de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \quad ; \quad u_n = \sqrt{1+n^2} - an,\ a \in \mathbb{R} \quad ; \quad u_n = n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

$$u_n = \ln(a+n) - \ln(n),\ a \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Exercice 7 :

Calculer les limites des suites suivantes, définies par la donnée de leur terme d'indice n respectif :

(a) $\sqrt{n}\sin(e^{-n})$ (b) $(2n^2+n+1)\ln\left(1+\dfrac{3}{5n^2+1}\right)$ (c) $n\left(\mathrm{e}^{n\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right)$

(d) $2^n\left(n^{\frac{1}{n!}} - 1\right)$ (e) $n^2\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$ (f) $\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}$ avec $a \neq b$

Suites monotones

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer par l'absurde que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ et retrouver la limite de (u_n).

Suites adjacentes

Exercice 9 : Soit (u_n) une suite décroissante qui converge vers 0 et (v_n) la suite définie par : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites extraites d'indices pairs et impairs de (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (v_n) converge.
3. *Application :* En admettant que lorsque $u_k = \dfrac{1}{k+1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$: déterminer comment obtenir une approximation de $\ln 2$ à 10^{-2} près, par défaut, par excès, et le code Python d'un script fournissant un encadrement de $\ln 2$ à 10^2 près.

Exercice 10. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$ puis donner la monotonie des suites u et v.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n-u_n}{2}$ puis $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0-u_0}{2^n}$. Déterminer, si elle existe, la limite de $v_n - u_n$.
3. Déduire des questions précédentes la convergence des deux suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante. En déduire la limite des suites u et v.

Suites implicites

Exercice 11 :

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ notée u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 Soit f_n la fonction $x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

1. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. En déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) converge.
4. Exprimer $f_n(x)$ sans le symbole $\sum$.
5. Montrer que $u_2 < 1$ et en déduire la limite de (u_n).

Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+7x}{2}} - 1$

1. Etudier les variations de f.

2. Chercher les points fixes de f (*i.e.* résoudre l'équation $f(x) = x$)
3. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [1, 2]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 2]$
   (b) Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et préciser son sens de variation.
   (c) En déduire que $(u_n)_n$ converge.
   (d) Calculer sa limite.

Exercice 14. Soit la fonction définie sur $]-\infty; 2]$ par $f(x) = \sqrt{2-x}$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Chercher les points fixes de f (*i.e.* résoudre $f(x) = x$).
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Tracer dans le plan raporté à un repère orthonormé, la courbe de f, la droite d'équation $y = x$, puis construire sur l'axe des abscisses les premiers termes de (u_n). Conjecturer la monotonie des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \in [0, 2]$.
3. Soit $h = f \circ f$; justifier que h est bien définie sur $[0; 2]$ et étudier son sens de variation sur cet intervalle.
4. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = h(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$.
   (b) Montrer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones (On pourra procéder par récurrence). En déduire leur convergence.
   (c) Établir que :
   $$h(x) = x \iff x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 2 - x^2 \geq 0$$
   (d) Vérifier que 1 et -2 sont racines du polynôme $x \mapsto x^4 - 4x^2 + x + 2$ et en déduire que h a un unique point fixe ℓ que l'on calculera.
   (e) En déduire les limites de $(u_2 n)$ et (u_{2n+1}) et la convergence de (u_n).
5. À l'aide de la représentation graphique faite en 2.a), deviner le comportement de (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty; 2[$. (On pourra distinguer plusieurs cas).